Problème guidé

Corrigé

142

1. 15 et 17 sont riches car $15 = 4^2 - 1^2$ et $17 = 9^2 - 8^2$.

2. a. 76 a pour diviseurs positifs : 1 ; 2 ; 4 ; 19 ; 38 ; 76.

En effet $76 = 1 \times 76 = 2 \times 38 = 4 \times 19$.

b. Deux nombres ont la **même parité** s'ils sont tous les deux pairs ou tous les deux impairs.

On choisit deux nombres entiers a et b.

Faisons un raisonnement par disjonction de cas.

- Si a et b sont pairs.
  Alors a s'écrit sous la forme $2q$ avec $q \in \mathbb{N}$ et b s'écrit $2q'$ avec $q' \in \mathbb{N}$.
  Ainsi, $a + b = 2q + 2q' = 2(q + q')$. Alors la somme $a + b$ est paire.
  Et $a - b = 2q - 2q' = 2(q - q')$. Alors la différence $a - b$ est aussi paire.
- Si a et b sont impairs.
  Alors a s'écrit sous la forme $2q + 1$ avec $q \in \mathbb{N}$ et b s'écrit $2q' + 1$ avec $q' \in \mathbb{N}$.
  Ainsi, $a + b = 2q + 1 + 2q' + 1 = 2(q + q' + 1)$. Alors la somme $a + b$ est paire.
  Et $a - b = 2q + 1 - 2q' - 1 = 2(q - q')$. Alors la différence $a - b$ est aussi paire.
- Si a est pair et b est impair.
  Alors a s'écrit sous la forme $2q$ avec $q \in \mathbb{N}$ et b s'écrit $2q' + 1$ avec $q' \in \mathbb{N}$.
  Ainsi, $a + b = 2q + 2q' + 1 = 2(q + q') + 1$. Alors la somme $a + b$ est impaire.
  Et $a - b = 2q - 2q' - 1 = 2(q - q') - 1$. Alors la différence $a - b$ est aussi impaire.

Conclusion : quelles que soient les parités de deux nombres entiers a et b, leur somme et leur différence ont la même parité.

c. $76 = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

Comme 76 est pair, alors le produit $(a - b)(a + b)$ est pair.

Pour que le résultat d'un produit soit pair, il faut qu'un des deux nombres soit pair. Cela signifie que $(a - b)$ est pair ou $(a + b)$ est pair.

D'après la question **2b**, $(a - b)$ et $(a + b)$ ont la même parité. Ils sont donc pairs tous les deux.

d. 76 est un nombre riche s'il peut s'écrire sous la forme $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

D'après la question **2a**, la seule possibilité pour que 76 soit riche est d'avoir $(a - b) = 2$ et $(a + b) = 38$.

Les nombres a et b sont solutions du système d'équations $\begin{cases} a - b = 2 \\ a + b = 38 \end{cases}$.

On résout ce système par substitution :

$$\begin{cases} a - b = 2 \\ a + b = 38 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 + b \\ 2 + b + b = 38 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 + b \\ 2b = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 + b \\ b = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 20 \\ b = 18 \end{cases}$$

La solution du système est $(20\ ;18)$.

On obtient ainsi $76 = 20^2 - 18^2$. 76 est bien un nombre entier riche.

3. a. $(p+1)^2 - p^2 = p^2 + 2p + 1 - p^2 = 2p + 1$.

b. $2p + 1$ est impair. La question **3a** nous donne l'égalité $2p + 1 = (p+1)^2 - p^2$, ce qui prouve que $2p + 1$ est un nombre riche (différence de carrés de deux entiers).

Donc tout nombre entier impair est riche.