

Je m'entraîne pour le contrôle

Corrigés

Exercice 1

1. **a.** 5 est un **diviseur** de 35.
- b.** 39 admet 13 pour **diviseur**.
- c.** 45 est un **multiple** de 9.
- d.** Le nombre 23 admet exactement deux **diviseurs**.

2. 142 a pour diviseurs positifs 1 ; 2 ; 71 ; 142.

En effet $142 = 1 \times 142 = 2 \times 71$.

Et 71 est un nombre premier.

3. **a.** $924 = 2^2 \times 3 \times 7 \times 11$ et $495 = 3^2 \times 5 \times 11$.

$$\text{b. } \frac{924}{495} = \frac{2^2 \times 3 \times 7 \times 11}{3^2 \times 5 \times 11} = \frac{2^2 \times 7}{3 \times 5} = \frac{28}{15}.$$

Exercice 2

1. 2 et 23 sont premiers car ils ont exactement deux diviseurs : 1 et eux-mêmes.

$33 = 11 \times 3$ donc 33 n'est pas premier car il admet plus de deux diviseurs : 1 ; 3 ; 11 et 33.

$143 = 11 \times 13$ donc 143 admet plus de deux diviseurs ; 143 n'est pas premier.

Pour savoir si 151 est premier, il faut tester la divisibilité de 151 par tous les nombres entiers compris entre 2 et 12 ($\sqrt{151} \approx 12,3$). Aucun de ces entiers ne divise 151 donc 151 est un nombre premier.

2. **a.** $1\,694 = 2 \times 7 \times 11^2$.

b. Si on divise A par 14, on obtient le carré de 11.

c. Pour obtenir un cube, il faut multiplier A par $2^2 \times 7^2 \times 11$.

On obtient $A = 2 \times 7 \times 11^2 \times 2^2 \times 7^2 \times 11 = 2^3 \times 7^3 \times 11^3 = 154^3$.

Exercice 3

1. Soient p et q deux nombres entiers, $2p + 1$ et $2q + 1$ sont deux nombres impairs. Alors leur différence est égale à $2q + 1 - (2p + 1) = 2q - 2p = 2(q - p)$.

Il s'agit bien d'un nombre pair car il s'écrit sous la forme $2k$ avec $k = q - p$ qui est un nombre entier.

2. a. Pour calculer l'aire de la surface hachurée, on soustrait l'aire du petit carré orange à celle du grand carré. Ce qui donne $6^2 - 3^2 = 36 - 9 = 27$. L'aire de la surface hachurée est 27.

b. $\mathcal{A} = x^2 - y^2$.

c. On veut avoir $\mathcal{A} = 91$, soit $x^2 - y^2 = 91$. On résout cette équation :

$$x^2 - y^2 = 91 \Leftrightarrow (x - y)(x + y) = 91$$

Comme les côtés x et y sont des nombres entiers alors $x - y$ et $x + y$ sont aussi des nombres entiers.

On cherche les diviseurs de 91 : $91 = 7 \times 13$ ou $91 = 1 \times 91$.

- 1^{er} cas : on choisit la décomposition $91 = 7 \times 13$.

x et y sont des nombres entiers positifs avec $x > y$ et $x + y > x - y$.

Donc $x + y = 13$ et $x - y = 7$.

Cela revient à résoudre un système à deux équations :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y = 13 \\ x - y = 7 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 13 \\ x = y + 7 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y + 7 + y = 13 \\ x = y + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 6 \\ x = y + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = y + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 10 \end{cases} \end{aligned}$$

La solution est $x = 10$ et $y = 3$.

- 2^e cas : on choisit la décomposition $91 = 1 \times 91$.

Comme précédemment $x + y > x - y$. Donc $x + y = 91$ et $x - y = 1$.

Cela revient à résoudre un système à deux équations :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y = 91 \\ x - y = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 91 \\ x = y + 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y + 1 + y = 91 \\ x = y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 90 \\ x = y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 45 \\ x = y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 45 \\ x = 46 \end{cases} \end{aligned}$$

La solution est $x = 46$ et $y = 45$.

d. Si on reproduit le raisonnement en posant $x^2 - y^2 = 47$, on obtient $(x - y)(x + y) = 47$.

Or 47 est premier, donc il n'y a qu'une seule décomposition possible : $47 = 47 \times 1$.

Cela donne $x + y = 47$ et $x - y = 1$.

On résout un système à deux équations :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y = 47 \\ x - y = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 47 \\ x = y + 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y + 1 + y = 47 \\ x = y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 46 \\ x = y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 23 \\ x = y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 23 \\ x = 24 \end{cases} \end{aligned}$$

La solution est $x = 24$ et $y = 23$.