Problème guidé

Corrigé

123

1. a.

	A	B	C
1	***n***	***A***	***B***
2	0	0,5	0
3	1	0,90909091	0,9
4	2	0,99009901	0,99
5	3	0,99900100	0,999
6	4	0,99990001	0,9999
7	5	0,99999000	0,99999
8	6	0,99999900	0,999999

b. Dans B2 : =10^A2/(10^A2+1).

Dans C2 : =(10^A2-1)/10^A2.

c. Pour $n = 0$:

$A = \frac{10^0}{10^0+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 0{,}5$ et $B = \frac{10^0-1}{10^0} = \frac{1-1}{1} = 0$.

Pour $n = 1$:

$A = \frac{10^1}{10^1+1} = \frac{10}{11}$ et $B = \frac{10^1-1}{10^1} = \frac{9}{10} = 0{,}9$.

Pour $n = 2$:

$A = \frac{10^2}{10^2+1} = \frac{100}{101}$ et $B = \frac{10^2-1}{10^2} = \frac{99}{100}$

d. Il semble que pour tout nombre entier naturel n, $A > B$.

2. a. Pour tout nombre entier naturel n,

$10^n < 10^n + 1 \Leftrightarrow \dfrac{10^n}{10^n + 1} < 1$ (car on divise par $10^n + 1$ qui est strictement positif, ce qui ne change pas le sens d'inégalité)

$\Leftrightarrow A < 1$.

Pour tout nombre entier naturel n,

$10^n - 1 < 10^n \Leftrightarrow \frac{10^n-1}{10^n} < 1$ (car $10^n > 0$)

$\Leftrightarrow B < 1$.

b. $(10^n + 1)(10^n - 1) = (10^n)^2 - 1 = 10^{2n} - 1$. (identité remarquable)

c. $A - B = \frac{10^n}{10^n+1} - \frac{10^n-1}{10^n} = \frac{10^n \times 10^n - (10^n-1)(10^n+1)}{10^n(10^n+1)} = \frac{10^{2n}-(10^{2n}-1)}{10^n(10^n+1)} = \frac{10^{2n}-10^{2n}+1}{10^n(10^n+1)} = \frac{1}{10^n(10^n+1)}$.

3. a. $A - B = \frac{1}{10^n(10^n+1)}$.

On sait que pour tout nombre entier naturel n, $10^n > 0$ et $10^n + 1 > 0$,

d'où $10^n(10^n + 1) > 0$.

Donc $\frac{1}{10^n(10^n+1)} > 0 \Leftrightarrow A - B > 0$.

b. D'après le résultat précédent, $A - B > 0 \Leftrightarrow A > B$.

La conjecture émise à la question **1d** est vérifiée : pour tout entier naturel n, $\frac{10^n}{10^n+1} > \frac{10^n-1}{10^n}$.