Problème guidé

Corrigé

114

1. a. On découpe un carré de 2 cm de côté dans chaque coin de la feuille de 26 cm de longueur et 20 cm de largeur.
- $26 - 2 \times 2 = 22$, la longueur de la boîte obtenue est 22 cm.
- $20 - 2 \times 2 = 16$, la largeur de la boîte obtenue est 16 cm.
- La hauteur de la boîte est égale au côté du carré découpé dans chaque coin, c'est-à-dire 2 cm.
- Le volume de la boîte est donné par la formule $\mathcal{V}$ = longueur × largeur × hauteur :

$$\mathcal{V} = 22 \times 16 \times 2 = 704 \text{ cm}^3$$

En enlevant un carré de 2 cm de côté dans chaque coin de la feuille, le volume de la boîte obtenue est 704 cm^3.

b. On découpe un carré de 5 cm de côté dans chaque coin de la feuille.
- $26 - 2 \times 5 = 16$, la longueur de la boîte obtenue est 16 cm.
- $20 - 2 \times 5 = 10$, la largeur de la boîte obtenue est 10 cm.
- La hauteur de la boîte est 5 cm.
- $\mathcal{V} = 16 \times 10 \times 5 = 800$ cm^3.

En enlevant un carré de 5 cm de côté dans chaque coin de la feuille, le volume de la boîte obtenue est 800 cm^3.

2. a. On découpe un carré de x cm de côté dans chaque coin de la feuille, de 26 cm de longueur et 20 cm de largeur.
- $26 - 2 \times x = 26 - 2x$, la longueur de la boîte obtenue est $26 - 2x$ cm.
- $20 - 2 \times x = 20 - 2x$. La largeur de la boîte obtenue est donc $20 - 2x$ cm.
- La hauteur de la boîte est égale au côté du carré découpé dans chaque coin de la feuille, elle est donc égale à x cm.
- Le volume de la boîte est donné par la formule $\mathcal{V}$ = longueur × largeur × hauteur, il peut donc s'exprimer par $V(x) = (26 - 2x)(20 - 2x)x$.

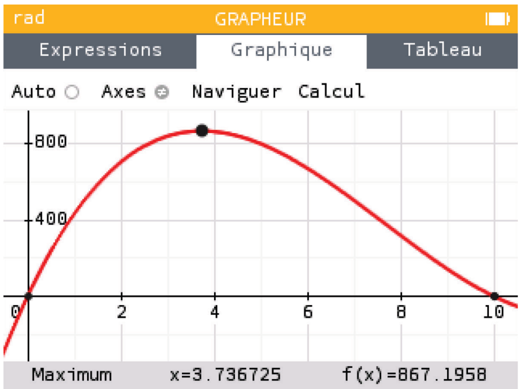
On peut développer l'expression, on obtient alors :

$$\begin{aligned} V(x) = (26 - 2x)(20 - 2x)x &= (520 - 52x - 40x + 4x^2)x \\ &= (4x^2 - 92x + 520)x \\ &= 4x^3 - 92x^2 + 520x \end{aligned}$$

On cherche le domaine de définition de la fonction V, sachant que x désigne la dimension du carré découpé dans chaque coin :
- la largeur de la feuille est égale à 20 cm, on ne peut donc pas découper de carré de côté supérieur à 10 cm ;
- le côté du carré découpé est obligatoirement un nombre positif.

La fonction V est donc définie sur l'intervalle [0 ; 10]. On remarque que si $x = 0$, la boîte est un fond sans rebords.

b. On trace la fonction V à l'aide d'un outil numérique.



Par lecture graphique, on dresse le tableau de variations suivant de la fonction volume V.

x	0	3,7	10
Variations de V	0 ↗	870	↘ 0

c. Les valeurs du tableau obtenues par lecture graphique sont approximatives.
L'usage d'un tableur, de la calculatrice ou d'un logiciel de géométrie dynamique permet d'affiner ces valeurs. Il semble que le volume est maximal lorsque l'on découpe dans chaque coin un carré de côté $x \approx 3{,}7367$ cm. Le volume maximal correspondant est alors $V \approx 867{,}1958$ cm^3.