Problème guidé

Corrigé

146

1. 1re méthode : sans coordonnées

a. On utilise la relation de Chasles ainsi que les données de l'énoncé.

- $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AD}$:

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IE}$ (grâce à la relation de Chasles)

$= \overrightarrow{AI} + \frac{1}{3}\overrightarrow{ID}$

$= \overrightarrow{AI} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD}\right)$ (on utilise à nouveau la relation de Chasles)

$= \overrightarrow{AI} + \frac{1}{3}\overrightarrow{IA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

$= \overrightarrow{AI} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AI} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

$= \frac{2}{3}\overrightarrow{AI} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

- $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AD}$:

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ (grâce à la règle du parallélogramme)

$= 2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AD}$

b. Exprimons $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$.

On a $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AD}$.

On remarque que $3\overrightarrow{AE} = 3\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AI} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right) = 2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

Ainsi, $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

c. Comme $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ alors les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, donc les points A, E et C sont alignés.

2. 2e méthode : avec coordonnées

a. On lit directement les coordonnées demandées sur la figure, qui sont $A(0\,;0)$ et $C(1\,;1)$.

b. Exprimons $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IE}$ (grâce à la relation de Chasles)

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{ID}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD}\right)$ (on utilise à nouveau la relation de Chasles)

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{IA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\right) + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

$= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

c. Dans le repère $\left(A\,;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD}\right)$, comme $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ alors $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

Coordonnées de $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}x_C - x_A\\ y_C - y_A\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$.

d. Nous cherchons à démontrer que les points A, E et C sont alignés, ce qui est équivalent à démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
En utilisant les coordonnées des vecteurs on peut calculer leur déterminant.

$$\det\left(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AC}\right) = \begin{vmatrix}\frac{1}{3} & 1\\ \frac{1}{3} & 1\end{vmatrix} = \frac{1}{3} \times 1 - \frac{1}{3} \times 1 = 0$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
On en déduit que les points A, E et C sont alignés.