Je m'entraîne pour le contrôle

Corrigés

Exercice 1

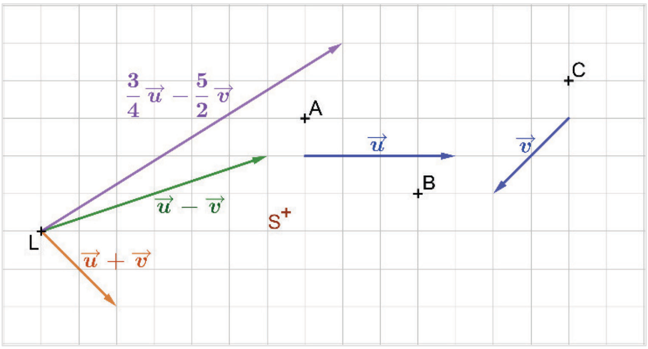
1. $\vec{z}$ et $\vec{u}$ ont même direction ; $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ont même direction.

2. a. On a $\vec{a} = -5\vec{b}$.

b. D'après la règle du parallélogramme, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$, mais aussi $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR}$.

Exercice 2

1. a. b. et **c.** On choisit de tracer les représentants à partir d'un point nommé L (on peut choisir n'importe quel point d'origine pour tracer les représentants).



2. a. On utilise la relation de Chasles autant de fois que nécessaire pour faire apparaître $\overrightarrow{AS}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

On a $\overrightarrow{SA} + 2\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SC}$.

d'où $\overrightarrow{SA} + 2(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{SC}$ (d'après la relation de Chasles)

$\overrightarrow{SA} + 2\overrightarrow{SA} + 2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AC}$ (d'après la relation de Chasles)

$3\overrightarrow{SA} + 2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AC}$

$2\overrightarrow{SA} = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{SA} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

donc $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

b. Pour placer le point S sur la figure, on utilise le résultat de la question précédente : S est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Exercice 3

a. Dans le repère $\left(A ; \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}\right)$, l'origine est le point A et les longueurs AD et AB sont égales à 1. Les coordonnées des points sont $A(0 ; 0)$; $B(0 ; 1)$; $D(1 ; 0)$; $C(1 ; 1)$; $E(3 ; 0)$.

b. I est le milieu de [CD] donc ses coordonnées sont :

$$x_I = \frac{x_C + x_D}{2} = \frac{1+1}{2} = 1 \quad \text{et} \quad y_I = \frac{y_C + y_D}{2} = \frac{1+0}{2} = 0{,}5.$$

Ainsi $I(1 ; 0{,}5)$.

c. $\overrightarrow{AI}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix} x_I - x_A \\ y_I - y_A \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix} 1-0 \\ 0{,}5-0 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$.

AIEF est un parallélogramme si, et seulement si, $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{FE}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{FE}$ sont égaux lorsque leurs coordonnées sont égales.

Ainsi, $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{FE} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I - x_A = x_E - x_F \\ y_I - y_A = y_E - y_F \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 3 - x_F \\ 0{,}5 = 0 - y_F \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_F = 2 \\ y_F = -0{,}5 \end{cases}$.

On a donc $F(2 ; -0{,}5)$.

d. Pour savoir si le triangle ECL est rectangle, on calcule les longueurs de ses côtés, puis on regarde si l'égalité de Pythagore est vérifiée.

$$EC = \sqrt{(x_C - x_E)^2 + (y_C - y_E)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$EL = \sqrt{(x_L - x_E)^2 + (y_L - y_E)^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{3} - 3\right)^2 + (2-0)^2} = \frac{2}{3}\sqrt{13}$$

$$LC = \sqrt{(x_L - x_C)^2 + (y_L - y_C)^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{3} - 1\right)^2 + (2-1)^2} = \frac{\sqrt{13}}{3}$$

EL est le côté le plus long du triangle ECL.

On calcule d'une part, $EL^2 = \left(\frac{2}{3}\sqrt{13}\right)^2 = \frac{4 \times 13}{9} = \frac{52}{9}$;

d'autre part, $EC^2 + LC^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{13}}{3}\right)^2 = 5 + \frac{13}{9} = \frac{58}{9}$.

On constate que $EL^2 \neq EC^2 + LC^2$.

L'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée donc le triangle ECL n'est pas rectangle.

e. M appartient à la droite (AB) donc M est sur l'axe des ordonnées du repère. Ainsi, son abscisse est nulle : $x_M = 0$. On a $M(0 ; y_M)$.

Les points E, I et M sont alignés lorsque les vecteurs $\overrightarrow{EI}$ et $\overrightarrow{EM}$ sont colinéaires.

Les coordonnées de $\overrightarrow{EI}$ sont $\overrightarrow{EI}\begin{pmatrix} x_I - x_E \\ y_I - y_E \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{EI}\begin{pmatrix} 1-3 \\ 0{,}5-0 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{EI}\begin{pmatrix} -2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$;

et celles de $\overrightarrow{EM}$ sont $\overrightarrow{EM}\begin{pmatrix} x_M - x_E \\ y_M - y_E \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{EM}\begin{pmatrix} 0-3 \\ y_M-0 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{EM}\begin{pmatrix} -3 \\ y_M \end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{EI}$ et $\overrightarrow{EM}$ sont colinéaires lorsque leur déterminant est égal à 0 :

$$\det\left(\overrightarrow{EI}, \overrightarrow{EM}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0{,}5 & y_M \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2y_M - 0{,}5 \times (-3) = 0 \Leftrightarrow -2y_M + 1{,}5 = 0 \Leftrightarrow y_M = 0{,}75$$

Ainsi, les points M, E et I sont alignés lorsque M a pour coordonnées $(0 ; 0{,}75)$.