Savoir-faire D Résoudre un problème d'optimisation

Résolution algébrique

Nicole veut construire un enclos de forme rectangulaire pour ses chèvres.
Elle dispose de 60 m de clôture.

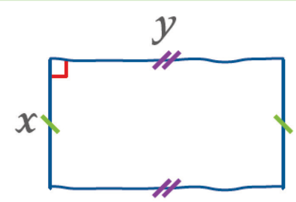
- Déterminer les dimensions de l'enclos pour que sa surface soit la plus grande possible.

Solution

Les étapes ❶ et ❷ sont les mêmes que pour la résolution graphique détaillée dans le ***savoir-faire D p. 269***

❶ L'enclos rectangulaire a un périmètre fixé (60 m).

❷ On note x la largeur de l'enclos et y sa longueur.
Le périmètre de l'enclos est $2x + 2y = 60$, soit $x + y = 30$.
On en déduit que $y = 30 - x$.
On note $g(x)$ l'aire de l'enclos. On a $g(x) = xy = x(30 - x)$.



❸ On utilise un logiciel de calcul formel pour trouver une expression de $g(x)$ qui permette de justifier la valeur du maximum.
On obtient parmi les formes alternatives : $225 - (x - 15)^2$
On justifie que l'on peut utiliser cette expression en montrant que l'égalité est vraie. Pour cela, on développe les deux expressions :
(1) $225 - (x - 15)^2 = 225 - (x^2 - 30x + 225) = -x^2 + 30x$
(2) $g(x) = 30x - x^2$
On a bien $g(x) = 225 - (x - 15)^2$.

❹ Pour tout nombre réel x, on a : $(x - 15)^2 \geq 0$
Puis en prenant l'opposé, on a : $-(x - 15)^2 \leq 0$
Enfin en ajoutant 225, on a : $225 - (x - 15)^2 \leq 225$
Donc $g(x) \leq 225$.
L'aire est maximale lorsque $g(x) = 225$, c'est-à-dire lorsque $225 - (x - 15)^2 = 225$,
ce qui revient à $(x - 15)^2 = 0$ donc $x = 15$.

❺ **Conclusion**
L'aire de l'enclos est maximale pour $x = 15$ m, et le maximum est 225 m^2.
Pour avoir la surface la plus grande, les dimensions de l'enclos seront donc $x = 15$ m pour la largeur et $y = 30 - 15 = 15$ m pour la longueur. L'enclos est un carré.