Compléments : problèmes et sens des opérations

I. Les enjeux de la résolution de problèmes arithmétiques

Depuis l'origine, la résolution de problèmes occupe une place centrale dans les propositions de Cap Maths. Au fil des éditions, notre réflexion s'est enrichie des retours des utilisateurs, de nos propres appréciations et des apports des chercheurs.

Ce texte a pour objectif de préciser nos orientations pour aider à la compréhension et la mise en œuvre de nos propositions.

Comment améliorer la réussite des élèves en matière de résolution de problèmes. En reprenant l'analyse de Catherine Houdement[1], nous retenons trois enjeux essentiels qui sont ensuite analysés plus complètement :

- Enrichir la mémoire des problèmes « basiques » (sens des opérations) ;
- Commencer à résoudre des problèmes « complexes », décomposables en problèmes basiques ;
- Résoudre des problèmes « atypiques » qui visent l'inventivité stratégique et la prise de risque.

1. Enrichir, pour chaque élève, sa mémoire de problèmes basiques

Pour chaque élève, dès le CE1, on attend une résolution rapide, quasi automatisée pour certains problèmes. Il s'agit de problèmes dont l'énoncé est simple, et qui peuvent de résoudre à l'aide d'une seule opération. L'objectif est donc d'enrichir ce qu'on appelle communément **le sens des opérations**.

Il faut souligner qu'un problème n'est pas « basique » en soi, mais qu'il ne l'est que pour un individu donné à un moment donné de ses apprentissages mathématiques. Le sens d'une opération s'élabore progressivement et s'enrichit de nouveaux types de problèmes qui peuvent être résolus quasi-automatiquement.

À ce sujet, trois préoccupations ont guidé nos choix dans les activités que nous proposons.

a. Mettre en place un apprentissage structuré du sens des opérations.

Quels types de problèmes peuvent être visés comme basiques au CE1 ? Quels moyens didactiques sont envisageables pour atteindre cet objectif ? Cette question est traitée dans les parties II, III et IV de ce document.

b. Permettre à chaque élève d'avancer à son rythme dans cette conquête du sens des opérations.

Pour cela, nous considérons qu'il est crucial de confronter les élèves à des problèmes de différents types, certains étant pour eux déjà basiques et d'autres ne l'étant pas encore, voire étant appelés à le devenir beaucoup plus tard. Pour résoudre ces derniers, les élèves ne peuvent donc pas encore solliciter l'opération sous-jacente, mais ils peuvent mobiliser d'autres procédures efficaces. Il est important également d'admettre que, à un moment donné, un même problème puisse être basique pour un élève et nécessiter une démarche d'investigation pour d'autres élèves. Cette diversité permet une confrontation fructueuse des différentes façons de résoudre un même problème. Le livret « Problèmes et énigmes » est particulièrement destiné à travailler dans cette direction, ainsi que certains problèmes proposés en fin de chaque unité (banques de problèmes).

c. Évaluer, pour chaque élève, sa capacité à résoudre de façon quasi automatisés certains problèmes en faisant appel un calcul élémentaire[2] ou à les résoudre en mettant en œuvre une autre procédure adaptée.

Un tel suivi peut être réalisé en utilisant le livret « Problèmes et énigmes » ou sa version modifiable disponible sur notre site www.hatier-clic.fr/CE1capgCE108.

Pour répondre à ces 3 préoccupations, les typologies de problèmes relevant du champ

[1] HOUDEMENT, C. (2017) Résolution de problèmes arithmétiques à l'école. Grand N, 100, 59-78

[2] Pour les catégories de problèmes envisagés, on appelle ici calcul élémentaire un calcul à 2 termes (parfois 3, notamment lorsque 3 parties sont réunies en un tout).

additif et du champ multiplicatif sont des instruments précieux (voir parties III et IV).

2. Commencer à résoudre des problèmes « complexes » ou « problèmes à étapes ».

Il s'agit de problèmes qui peuvent être résolus en les décomposant en une suite de problèmes basiques. Leur résolution ne suppose pas seulement la capacité à résoudre les problèmes basiques sous-jacents. Elle nécessite également la capacité à identifier et connecter les informations qui permettent de reconnaître les sous-problèmes basiques et d'en planifier la résolution. Au CE1, le travail sur ces problèmes reste modeste et le nombre d'étapes limité (une seule étape intermédiaire, parfois deux). Dans certains cas, les sous-problèmes sont formulés dans l'énoncé, dans d'autres cas leur identification est laissée à la charge de l'élève.

3. Résoudre de problèmes « atypiques » qui visent l'inventivité stratégique et la prise de risque.

La résolution de ces problèmes, parfois appelés « problèmes pour chercher » ou « problèmes ouverts », suppose l'élaboration d'une stratégie, mobilise des capacités de raisonnement et renforce chez l'élève la confiance en soi, l'originalité et la persévérance. Il s'agit donc de développer chez l'élève **un comportement de chercheur**.
Avant d'être reconnus comme basiques, un problème est souvent résolu comme problème atypique.
Les énigmes proposées dans le livret « Problèmes et énigmes » sont toutes à considérer comme problèmes atypiques.

II. Le sens des opérations : quel apprentissage ? Considérations générales

L'expression « sens d'une opération » évoque la capacité des élèves à utiliser à bon escient cette opération pour résoudre une diversité de problèmes (voir aussi la notion de problèmes basiques, partie I).

La situation est plus complexe que ne pourrait le laisser supposer cette expression. Comme l'ont montré de nombreux travaux (en particulier en France, ceux de Gérard Vergnaud), une même opération peut être sollicitée pour résoudre une grande variété de problèmes. Il serait donc plus juste de parler des « différents sens » d'une opération.

Une problématique complexe

Si, pour certains problèmes dits "basiques", la résolution à l'aide d'un calcul élémentaire[3] ne pose guère de difficultés pour la majorité des élèves, pour d'autres au contraire cette résolution rapide est acquise plus tardivement et nécessite la mise en place d'un enseignement organisé sur la base de situations appropriées.

Pour résumer cette problématique, on peut se référer aux deux schémas suivants :

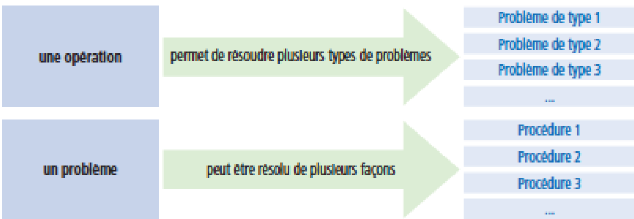


Illustration avec le cas de la soustraction

Au début du cycle 2, pour beaucoup d'élèves, **la soustraction permet de trouver ce qui reste** à la suite d'une diminution. En quelque sorte, **soustraire, c'est enlever**. Ce sens de la soustraction est assez tôt accessible, mais il peut aussi constituer un obstacle pour l'accès à d'autres sens de cette opération.

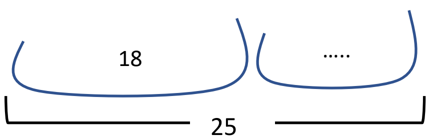
Ainsi, **la soustraction permet aussi de trouver un complément**, par exemple pour résoudre le problème :

Un sac contient 25 billes. Certaines billes sont bleues et les autres sont rouges. Il contient 18 billes bleues. Combien contient-il de billes rouges ?

Mais, dans cette situation, il est plus naturel de se demander ce qu'il faut ajouter à 18 pour obtenir 25 plutôt que ce que de penser à soustraire 18 de 25. Autrement dit, il est plus naturel de raisonner d'un point de vue additif que d'un point de vue soustractif et cela en utilisant une variété de procédures :

- Faire un dessin ou un schéma et dénombrer les billes bleues ;
- Compléter 18 pour obtenir 25 en avançant d'un en un au-delà de 18 et en comptant le nombre de pas nécessaires (soit oralement, soit en appui sur les doigts ou sur la file numérique) ;
- Compléter 18 pour obtenir 25 en avançant par bonds successifs, par exemple de 18 à 20, puis de 20 à 25 et en ajoutant ensuite la valeur des bonds réalisés ;
- Écrire l'addition lacunaire 18 + … = 25 et trouver le résultat de diverses façons…

Ces procédures, toutes de nature additive, peuvent assez facilement être mises en relation les unes avec les autres car elles correspondent au même raisonnement, qui peut être s'appuyer sur un schéma de la situation comme :



Il est plus difficile d'envisager que ces procédures et ce schéma puisse être mis en relation avec le calcul **25 – 18 = …. .**

La même question se pose pour d'autres catégories de problèmes qui peuvent être

[3] Pour les catégories de problèmes envisagés, on appelle ici calcul élémentaire un calcul à 2 termes (parfois 3, notamment lorsque 3 parties sont réunies en un tout)

résolus en utilisant une soustraction (cf. « Typologie des problèmes du champ additif », partie III).

Un apprentissage nécessaire

L'équivalence entre le calcul d'un complément et celui d'une soustraction ne va pas de soi. Elle est donc à construire avec les élèves. À partir de là, deux questions se posent :

- Faut-il proposer des problèmes relevant d'un sens particulier avant qu'il soit enseigné ?
- À quel moment tel sens particulier peut-il être enseigné et comment ?

La réponse à la première question constitue un choix didactique fondamental. Le consensus est large aujourd'hui, au niveau de la recherche comme dans les programmes, pour estimer qu'il est nécessaire que les élèves aient résolu des problèmes relevant d'une opération donnée avant que celle-ci n'ait été enseignée et, lorsqu'elle l'a été, avant qu'elle ne soit reconnue comme efficace pour traiter certains problèmes. C'est dans cet esprit que des problèmes de partage équitable ou de groupements en parts égales sont proposés tout au long du cycle 2, donc avant que la division ne soit explicitement enseignée. Ils sont résolus à l'aide des opérations disponibles (addition et soustraction d'abord, multiplication ensuite). Voir en particulier à ce sujet les documents relatifs aux typologies pour le champ additif et pour le champ multiplicatif (*cf.* parties III et IV). Dans le guide de l'enseignant de Cap Maths, pour chaque problème proposé dans le fichier, dans le livret "Problèmes et énigmes" ou en calcul mental, on trouve un inventaire des procédures que les élèves peuvent mobiliser et des difficultés qu'ils peuvent rencontrer.

La réponse à la deuxième question est plus délicate et doit être élaborée pour chaque opération au regard des connaissances disponibles, notamment celles apportées par les évaluations sur de larges cohortes d'élèves. La question peut être résumée ainsi : comment, pour certains types de problèmes relatifs à une opération, aider les élèves à passer d'une résolution dite personnelle à une résolution à l'aide de cette opération. Un développement spécifique est proposé pour chacun des deux champs additif (partie III) et multiplicatif (partie IV).

III. Le sens des opérations : quel apprentissage ? Champ additif

Ce document explicite les propositions de Cap Maths pour le champ additif, c'est-à-dire les problèmes qui relèvent du sens de l'addition et de la soustraction. On y précise les catégories de problèmes pour lesquels le recours à un calcul élémentaire[4] a été enseigné au CP et doit être entretenu au CE1, ceux pour lesquels ce recours fait l'objet d'un apprentissage spécifique au CE1 et ceux qui sont proposés aux élèves en vue d'une résolution personnelle utilisant des procédures variées (cf. typologie des problèmes du champ additif, en annexe)

Concernant des problèmes dont on peut attendre à un moment de la scolarité la résolution rapide par un calcul élémentaire, il est important de souligner que certains élèves ne peuvent encore en donner qu'une résolution personnelle. La priorité reste de les encourager à résoudre les problèmes proposés, sans perdre de vue que l'exploitation de solutions diverses, leur explicitation et leur mise en relation peut aider les élèves à progresser vers l'utilisation de l'opération élémentaire.
La typologie donnée en annexe pour le champ additif est inspirée de celle élaborée par Gérard Vergnaud. Elle ne concerne que les types de problèmes envisagés au CE1.

Les catégories de problèmes qui peuvent être résolus rapidement par un calcul élémentaire dès le début du CE1.

Pour l'addition, il s'agit des problèmes relevant de deux catégories :

- Une grandeur (quantités, prix, longueurs…) subit une transformation positive (ajout, augmentation…) et la question porte sur l'état final (problèmes codés E_i T^+ **E_f**) ;
- Deux grandeurs (quantités, prix, longueurs…) sont combinées (collections réunies, segments mis bout à bout…) et la question porte sur la valeur du total (problèmes codés P_1 P_2 **T**).

Pour la soustraction, il s'agit des problèmes relevant d'une seule catégorie :

- Une grandeur (quantités, prix, longueurs…) subit une transformation négative (retrait, diminution…) et la question porte sur l'état final (problèmes codés E_i T^- **E_f**).

Le recours à un calcul élémentaire est immédiat pour certains élèves. Il nécessite une reformulation du problème pour d'autres élèves ou encore n'intervient qu'après qu'un dessin plus ou moins schématisé ait permis aux élèves de bien comprendre la situation. Pour d'autres élèves encore, des procédures plus rudimentaires sont nécessaires (dessin et comptage, surcomptage…). Cela peut dépendre de la taille des nombres en jeu, des grandeurs évoquées, de la formulation de l'énoncé…
Dans tous les cas, au moment de l'exploitation collective, le calcul additif ou soustractif est explicité et mis en relation avec d'autres procédures éventuellement utilisées.

Les catégories de problèmes pour lesquels le recours à un calcul élémentaire est envisagé au CE1.

Pour le domaine additif, l'essentiel du travail dans ce sens sera proposé au CE2, au moment où augmentent de façon importante les capacités de représentation des situations, de raisonnement et de calcul des élèves.
Cependant dès le CE1, **des situations d'apprentissage sont proposées pour amener les élèves à considérer que, dans les situations où on cherche la valeur d'une partie d'un tout, le calcul d'un complément est équivalent à celui d'une soustraction.** Il s'agit donc de la catégorie de problèmes codée P_1 **P_2** T.

Pour cela, une situation didactique est mise en place en unité 7 (séances 1 et 2) : *La boite mystérieuse*. Dans une boite qui contient des cubes rouges et des cubes bleus, il s'agit de trouver le nombre de cubes bleus connaissant le nombre total de cubes et le nombre de cubes rouges.

[4] Pour les catégories de problèmes envisagés, on appelle ici calcul élémentaire un calcul à 2 termes (parfois 3).

Au cours de la 1ère séance, plusieurs problèmes sont proposés avec des nombres simples, inférieurs à 12, permettant la mise en œuvre de diverses procédures qui font l'objet d'un inventaire collectif, aucune n'étant alors privilégiée. Une schématisation est également mise en place collectivement. Exemple avec une boite contenant 4 cubes rouges et 3 cubes bleus, en indiquant aux élèves qu'on sait qu'elle contient au total 7 cubes et que 4 d'entre eux sont rouges.

PROCÉDURES POSSIBLES

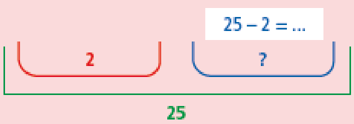
EXEMPLE POUR LE PROBLÈME A :
- Dessin des cubes et dénombrement.
- Utilisation d'un schéma du type « panier » comme appui à un surcomptage ou à un calcul.
- Surcomptage et dénombrement des nombres surcomptés, par exemple au-delà de 4 jusqu'à 7 (cinq, six, sept).
- Calcul direct du type :
  • 4 + 3 = 7 (utilisation d'un fait numérique mémorisé)
  • 7 − 4 = 3

(Extrait du guide de l'enseignant, p. 235)

Au cours de la 2e séance, d'autres problèmes sont proposés avec un nombre total de cubes plus élevé, notamment des problèmes où le nombre de cubes rouges est petit, ce qui peut inciter les élèves à recourir à une procédure soustractive, par exemple avec 25 cubes au total et 2 cubes rouges. L'utilisation de la soustraction peut être mise en évidence au cours de l'explicitation collective en l'accompagnant d'une formulation qui permet de faire le lien avec un sens connu de la soustraction.

EXPLICITATION, VERBALISATION

- **Tous les problèmes peuvent être représentés par un schéma de type « panier » dans lequel on peut placer les données et ce qu'on cherche** (voir ci-dessous).
- **Selon les problèmes, certaines procédures sont plus faciles à utiliser :**
  – *Problème B* : on peut enlever les 2 cubes rouges, il ne restera que les cubes bleus, ce qui correspond au calcul **25 − 2 = 23**.

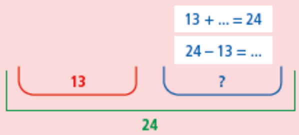


(Extrait du guide de l'enseignant, p. 236)

On explicite le fait que pour n'avoir que les cubes bleus dans la boite pour mieux les dénombrer au moment de la vérification des réponses, on peut enlever les 2 cubes rouges, ce qui établit un lien avec un sens connu de la soustraction (utilisation pour trouver l'état final dans une situation de transformation négative).

Dans d'autres cas, on met en évidence que les deux procédures (calcul d'un complément et calcul d'une soustraction) sont également faciles à mettre en œuvre.

– *Problème E* : on peut utiliser les deux méthodes.



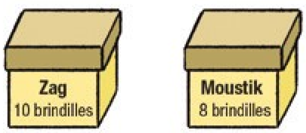
Conclure que :
– ***On peut remplacer une addition à trou par une soustraction et inversement.***

Les nombres sont choisis pour que l'addition lacunaire et la soustraction soient toutes deux "sans retenue", donc faciles à réaliser.
Le recours à la soustraction peut à nouveau être justifié par le fait que pour n'avoir que les cubes bleus dans la boite, il faut en retirer les cubes rouges.

À la suite de cet apprentissage, certains élèves auront compris que la soustraction est utilisable dans tous les problèmes de ce type alors que d'autres auront encore fréquemment recours à l'addition à trou. Il leur faudra du temps et même une reprise d'une situation didactique identique pour y parvenir. Mais les premiers acquis peuvent être mobilisés et confortés en calcul mental, en incitant les élèves à choisir la procédure la plus adaptée pour soustraire un nombre à un autre : 42 – 5 se calcule aisément en soustrayant (par exemple 2, puis 3) alors que 52 – 48 se calcule plus facilement en complétant 48 pour atteindre 52. Un travail dans ce sens est mené en unité 9.

En fin d'année (unité 8), est également envisagé un travail sur **l'utilisation de la soustraction pour calculer la différence entre 2 quantités, dans des problèmes de comparaison** qui peuvent être codés g G C^+ ou g G C^-.

Le problème est posé à partir de boites contenant des objets, la question portant sur le nombre d'objets en plus ou en moins dans une boite par rapport à l'autre.

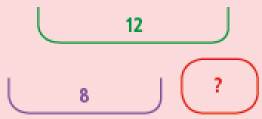


Lors de la résolution et au moment de l'exploitation collective, le lien est fait avec les deux sens de la soustraction déjà travaillés : le sens "reste à la suite à d'une diminution" et le sens "complément dans une situation parties/tout".

Tous les problèmes peuvent être représentés par un schéma de type « paniers » dans lequel on peut placer les données et ce qu'on cherche.

EXEMPLES :

Pour **A.** :



L'appui sur une schématisation permet de reformuler le problème en faisant appel à des sens connus de la soustraction.
Concrètement, pour trouver la différence, on peut

- soit chercher comment compléter la plus petite quantité pour la rendre égale à la plus grande ;
- soit chercher ce qu'il faut enlever à la plus grande pour la rendre égale à la plus petite.

- **Le problème revient toujours à chercher comment compléter le plus petit nombre** (pour A : 8) **pour obtenir le plus grand** (12) ou ce qu'il faut soustraire au plus grand pour obtenir le plus petit.
- **On peut dire** ***que 12 c'est 4 de plus que 8 ou que 8 c'est 4 de moins que 12*** **ou encore** ***que 4 c'est la différence entre 8 et 12.***
- **On peut calculer la différence de deux façons, par exemple pour A :**
  – **1re façon :** écrire 8 + …. = 12 et essayer de compléter.
  – **2e façon :** écrire 12 – 8 = ….

(Extrait du guide de l'enseignant, p. 270)

Là aussi, il sera nécessaire de reprendre cet apprentissage au CE2, voire au CM1, pour le stabiliser pour tous les élèves.

Les catégories de problèmes dont on attend une résolution par des procédures variées au CE1.

Pour les autres catégories de problèmes du domaine additif (voir la typologie en annexe), les élèves utilisent des procédures variées, leur résolution à l'aide d'un calcul élémentaire n'étant explicitement enseignée que plus tard, principalement au CE2. Pour la plupart des élèves, ces problèmes restent donc des problèmes de recherche.

PROBLÈME 18 ► Transformation : Ei - Ef

18 Alex a joué aux billes pendant la récréation.
Il a perdu 7 billes. Maintenant, il a 13 billes.
Combien de billes Alex avait-il avant la récréation ?

STRUCTURE DU PROBLÈME
- **Diminution, avec recherche de la quantité initiale**

PROCÉDURES POSSIBLES
- Dessin plus ou moins schématisé des billes et comptage des billes de départ
- Schéma épuré servant d'appui à un calcul, par exemple :
  - addition de 13 et de 7
  - essais de nombres auxquels on soustrait 7
- Mêmes calculs sans appui sur un schéma

Calcul associé : 13 + 7 = 20 ou 20 – 7 = 13

RÉPONSE : Alex avait 20 billes.

Extrait du guide de l'enseignant, p. 160

En voici un exemple.

Pour ce problème, l'addition permet une résolution rapide. Il est très peu probable que, dans une situation qui évoque une diminution, les élèves y fasse directement référence.
Ils peuvent soit s'appuyer sur la chronologie du récit et tester des nombres auxquels ils soustraient 7 pour atteindre 13.
Ils peuvent également utiliser un raisonnement en considérant que pour retrouver ses billes de départ Alex doit regagner les 7 billes perdue ou encore que le lot initial de billes est constitué des billes perdues et des billes restantes, ce qui conduit à additionner 13 et 7. Ces raisonnements sont difficiles au CE1, mais peuvent être aidés par l'utilisation d'un schéma, par exemple :

Peu d'élèves de CE1 sont cependant capables de produire de tels schémas de façon autonome.

Enfin, avec de petits nombres, un dessin des billes incitera plutôt à trouver la réponse par un simple dénombrement des billes.

Annexe : typologie des problèmes du champ additif envisagés au CE1

Pour chaque type de problème, un exemple est fourni, emprunté au Livret "Problèmes et énigmes" inséré dans le fichier Cap Maths CE1 (3e colonne). La 4e colonne répertorie par leurs numéros tous les problèmes de ce livret.

18 Alex a joué aux billes pendant la récréation.
Il a perdu 7 billes. Maintenant, il a 13 billes.
Combien de billes Alex avait-il avant la récréation ?

Il est important de noter qu'un même problème peut parfois être situé dans deux catégories différentes selon l'interprétation qui en est faite par le lecteur.
Le problème ci-contre est ainsi placé dans la catégorie « Transformation négative, avec recherche de l'état initial » (**E_i** T- E_f), et peut être schématisé par :

..... billes   perte de 7 billes   13 billes

Il pourrait être aussi placé dans la catégorie "Combinaison, avec recherche d'une partie" (P1 P2 T) si le lecteur considère que la quantité de billes initiale (T) est composée des billes perdues (P1) et des billes restantes (P2), et schématisé par :

$$\underbrace{\underbrace{\text{7 billes perdues}}\quad\underbrace{\text{13 billes restantes}}}_{\text{....... billes}}$$

Les tableaux qui suivent recensent les types de problèmes envisagés au CE1, avec, pour chaque type, un exemple dans la 3e colonne et les problèmes qui en relèvent dans le livret "Problèmes et énigmes" dans la 4e colonne (en grisé).

Transformation (augmentation, diminution)

E_i : état initial   T : transformation positive ou négative E_f : état final

E_i T^+ E_f	Transformation positive, recherche de l'état final	Alex a déjà 124 photos de Moustik. Lisa lui donne 87 nouvelles photos de Moustik. **Combien de photos de Moustik Alex a-t-il maintenant ?** (n° 24)	24 35 36
E_i T^+ E_f	Transformation positive, recherche de l'état initial	Pendant la nuit, 6 nouveaux champignons ont poussé dans le pré. Il y a maintenant 15 champignons dans le pré. **Combien de champignons y avait-il dans le pré hier soir ?** (n° 6)	6 19 55
E_i T^+ E_f	Transformation positive, recherche de la valeur de la transformation	Au début de la récréation, Lisa avait 11 billes. À la fin de la récréation, elle en a 18. **Combien de billes Lisa a-t-elle gagnées pendant la récréation ?** (n° 9)	9 51b
E_i T- E_f	Transformation négative, recherche de l'état final	Lisa a acheté une boite de 18 chocolats. Elle donne 12 chocolats à Alex. **Combien de chocolats lui reste-t-il ?** (n° 5)	5 11 15 35 36 43b 44b 47 49b
E_i T- E_f	Transformation négative, recherche de l'état initial	Alex a joué aux billes pendant la récréation. Il a perdu 7 billes. Maintenant, il a 13 billes. **Combien de billes Alex avait-il avant la récréation ?** (n° 18)	4 18 20
E_i T- E_f	Transformation négative, recherche de la valeur de la transformation	En arrivant à l'école, le matin, Zoé a 65 billes. À midi, elle n'en a plus que 52. **Combien de billes Zoé a-t-elle perdues le matin ?** (n° 51-a)	23 51a

Combinaison (réunion de 2 parties ou plus)

P_1 : première partie P_2 : deuxième partie   T : totalité

P_1 P_2 T	Recherche de la totalité	Sur un parking, il y a 10 voitures blanches et 7 voitures noires. **Combien de voitures y a-t-il sur le parking ?** (n° 1)	1 3 7 17a 42b 43a 48
P_1 P_2 T	Recherche d'une partie	Dans un pré, il y a 25 moutons. 15 moutons sont blancs, tous les autres sont noirs. **Combien de moutons noirs y a-t-il dans le pré ?** (n° 12)	2 10 12 17b 28c 34 50

Comparaison de 2 quantités ou de 2 grandeurs

g : grandeur la plus petite   C : comparaison positive (de plus) ou négative (de moins)
G : grandeur la plus grande

g G C^+	Comparaison positive, recherche de la plus grande valeur	Lisa a 188 perles. Zoé en a 72 de plus que Lisa. **Combien de perles Zoé a-t-elle ?** (n° 25)	25 45
g G C^+	Comparaison positive, recherche de la plus petite valeur	Léo mesure 124 cm. Il mesure 10 cm de plus que José. **Combien de centimètres mesure José ?** (n° 26)	26 39a 42a
g G C^+	Comparaison positive, recherche de la valeur de la comparaison	Lisa a rangé 75 billes dans une boite rouge et 60 billes dans une boite bleue. Il y a plus de billes dans la boite rouge que dans la boite bleue. **Combien de plus ?** (n° 41)	32
g G C^-	Comparaison négative, recherche de la plus grande valeur	Aïcha et Lou font des châteaux avec des cubes. Aïcha a utilisé 25 cubes. Elle a utilisé 10 cubes de moins que Lou. **Combien de cubes Lou a-t-elle utilisés ?** (n° 31)	31 39b 41 46
g G C^-	Comparaison négative, recherche de la plus petite valeur	Le matin, Moustik a mangé 32 croquettes. Le soir, il a mangé 5 croquettes de moins que le matin. **Combien de croquettes a-t-il mangées le soir ?** (n° 30)	30
g G C^-	Comparaison négative, recherche de la valeur de la comparaison	Lundi, Zag a ramassé 30 brindilles. Mardi, elle a ramassé 25 brindilles. Elle en a moins ramassé le mardi que le lundi. **Combien de moins ?** (n° 29)	29 33d 40

IV. Le sens des opérations : quel apprentissage ?
Champ multiplicatif

Ce document explicite les propositions de Cap Maths pour le champ multiplicatif, c'est-à-dire les problèmes qui relèvent du sens de la multiplication et de la division. On y précise les catégories de problèmes pour lesquels le recours à un calcul élémentaire[5] fait l'objet d'un apprentissage spécifique au CE1 et ceux qui sont proposés aux élèves en vue d'une résolution personnelle utilisant des procédures variées (*cf. typologie des problèmes du champ multiplicatif, en annexe*)
Les problèmes dont on peut attendre la résolution par un calcul élémentaire au CE1 sont relatifs à la multiplication. Pour ceux qui sont relatifs à la division, leur résolution fait appel aux 3 opérations connues : addition, soustraction, multiplication. La priorité reste d'encourager les élèves à résoudre les problèmes proposés à l'aide de procédures variées, sans perdre de vue que l'exploitation de solutions diverses, leur explicitation et leur mise en relation peut aider les élèves à progresser vers l'utilisation de l'opération élémentaire.
La typologie donnée en annexe pour le champ multiplicatif est inspirée de celle élaborée par Gérard Vergnaud. Elle ne concerne que les types de problèmes envisagés au CE1.

Les catégories de problèmes pour lesquels le recours à un calcul élémentaire est envisagé au CE1.

Pour le domaine multiplicatif, l'essentiel du travail porte sur la mise en place d'une opération nouvelle : **la multiplication**.

Cette mise en place est faite sur une catégorie de problèmes où **on cherche une valeur totale suite à la réunion de plusieurs valeurs identiques**, problèmes codés
1 → a
b → **c**
(cf. typologie des problèmes du champ multiplicatif, en annexe).
Plus généralement, ces problèmes relèvent du domaine de la proportionnalité.

[5] Pour les catégories de problèmes envisagés, on appelle ici calcul élémentaire un calcul à 2 termes (parfois 3).

Des problèmes de ce type sont proposés dès le début de l'année et d'abord résolus par des procédures variées : dessin de la situation et dénombrement, addition itérée…
En unité 3, la situation des trains est exploitée pour mettre en place diverses désignations associées à la multiplication, en particulier la désignation symbolique avec le signe x.

Les élèves doivent, par exemple, trouver toutes les façons de réaliser des trains identiques en utilisant 30 cubes emboitables. Dans un premier temps, les solutions sont exprimées sous diverses formes connues des élèves :

Dessin	Comptage	Écriture additive	Expression avec « fois »
 6 trains de 5 cubes	5 / 10 / 15 / 20 / 25 / 30	5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 30	6 fois 5

À partir de là, l'enseignant présente l'écriture multiplicative comme une autre manière d'exprimer les calculs réalisés.

Dessin	Comptage	Écriture additive	Expression avec « fois »
 6 trains de 5 cubes	5 / 10 / 15 / 20 / 25 / 30	5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 30	6 fois 5

Écriture avec « × »
6 × 5 = 30
5 × 6 = 30

(Extrait du guide de l'enseignant, p. 108)

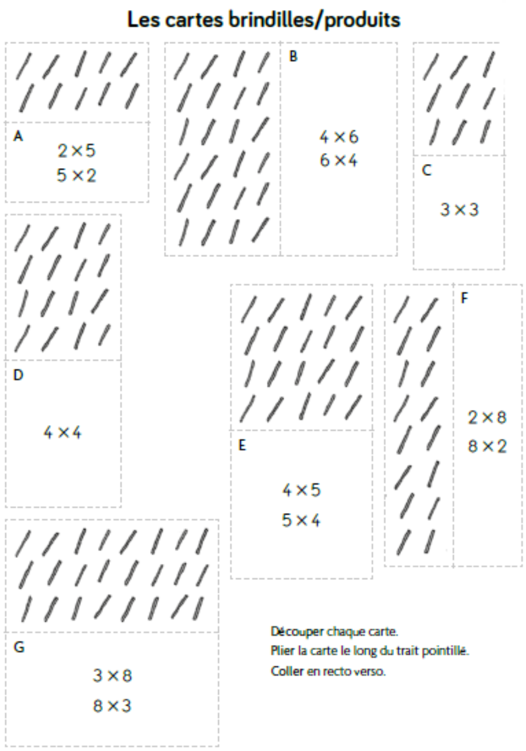
La multiplication est donc présentée d'emblée comme commutative : 5 × 6 est égal à 6 × 5.
Elle est associée à plusieurs évocations :

- imagée : réunion de collections identiques (ici trains de cubes) ;

- langagière, avec le mot **fois** ;
- symbolique : addition itérée avec le signe +, produit de 2 facteurs avec le signe x.

Ces différentes évocations mises en relation sont l'expression d'un premier sens donné à la multiplication.

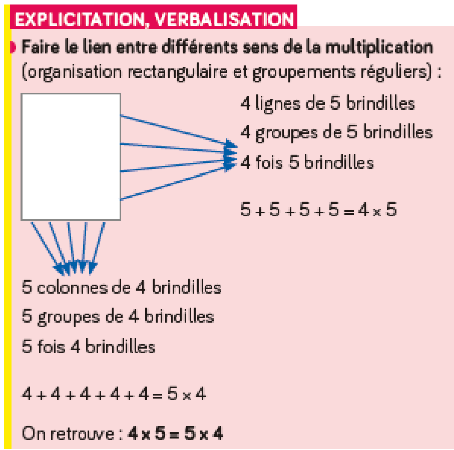
Par la suite, en unité 4, ce sens est étendu à des situations où il s'agit de **trouver la valeur d'une quantité d'objets placés en organisation rectangulaire**.



Les élèves disposent de cartes portant des écritures multiplicatives. L'enseignant possède, lui, des cartes recto-verso avec, pour chaque carte, d'un côté une ou deux écritures multiplicatives et de l'autre une quantité correspondante de brindilles disposées en rangées identiques.

Il s'agit de comparer les produits, la vérification se faisant ensuite à l'aide des quantités de brindilles.

Lors de l'exploitation collective, le lien est fait avec le sens connu de la multiplication.


EXPLICITATION, VERBALISATION

Faire le lien entre différents sens de la multiplication (organisation rectangulaire et groupements réguliers) :

On retrouve : **4 x 5 = 5 x 4**

(Extrait du guide de l'enseignant, p. 143)

4 lignes de 5 brindilles c'est 4 groupes de 5 brindilles, c'est 4 fois 5 brindilles.
Le nombre de brindilles peut être calculé par 5 + 5 + 5 + 5 ou par 4 x 5.
De plus, cette disposition rectangulaire, est l'occasion de souligner à nouveau la commutativité de la multiplication.

Les catégories de problèmes dont on attend une résolution par des procédures variées au CE1.

Pour d'autres catégories de problèmes du champ multiplicatif (voir la typologie en annexe), les élèves utilisent des procédures variées, leur résolution à l'aide d'un calcul élémentaire, la division, n'étant explicitement enseignée que plus tard, au CE2. Il s'agit des **problèmes de partage équitable où on cherche la valeur de chaque part**

(codés $\begin{matrix} 1 \rightarrow a \\ b \rightarrow c \end{matrix}$)

ou des **problèmes de groupements réguliers où on cherche le nombre de parts**

(codés $\begin{matrix} 1 \rightarrow a \\ b \rightarrow c \end{matrix}$)

Des problèmes de ces 2 catégories sont proposés à différents moments de l'année, notamment dans le livret Problèmes et énigmes. Ils font l'objet d'un travail plus accentué en unité 7 (problèmes de groupements réguliers) et en unité 8 (problèmes de partage équitable).

Exemple de problème de groupements réguliers (recherche du nombre de parts égales).

Lisa a 30 tulipes.
Elle veut faire de bouquets de 5 tulipes.
Combien peut-elle faire de bouquets ?

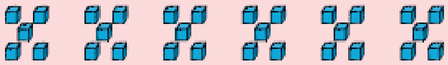
Les procédures utilisées par les élèves sont variées et font l'objet d'une mise en relation

EXPLICITATION, VERBALISATION

Mettre en relation différentes procédures.

EXEMPLE :

En illustrant avec les cubes :



On a fait des groupes de 5 cubes pour en avoir 30.
Chaque groupe représente 1 bouquet.

5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 30

On ajouté des « 5 » jusqu'à atteindre 30.
Chaque « 5 » représente 1 bouquet.

6 x 5 = 30 ou 5 x 6 = 30

On a cherché « Combien de fois 5 égale 30 ? »

(Extrait du guide de l'enseignant, p. 244)

Des élèves peuvent représenter les tulipes par des cubes et les grouper par 5 (un groupe représente un bouquet).
D'autres évoquent chaque bouquet par le nombre 5 (5 tulipes) et ajoutent des 5 pour obtenir 30. Le nombre de bouquets est alors donné par le nombre de '5' ajoutés.
D'autres encore cherchent combien de fois 5 est contenu dans 30 essayant des produits dont un facteur est 5 ou en répondant directement à l'aide d'un résultat de la table de 5. Le facteur '6' (de 6 fois 5) correspond au nombre de groupes de 5 cubes et au nombre de '5' ajoutés pour obtenir 30.

Exemple de problème de partage équitable (recherche de la valeur de chaque part).

Cinq personnes veulent se partager 75 buchettes.
Chacun doit en avoir autant, le même nombre.
Combien de buchettes chacun va-t-il mettre dans son enveloppe ?

Là aussi, les procédures utilisées par les élèves sont variées et font l'objet d'une mise en relation

PROCÉDURE POSSIBLE

– Dessiner 30 buchettes isolées (ou groupées par 10) et réaliser un partage ou une distribution en 5 lots équivalents.
– Essayer de façon organisée ou non des sommes de 5 nombres égaux pour obtenir 30.
– Utiliser un résultat de la table de multiplication de 5.
– Partager chaque dizaine en 5 et ajouter les résultats.

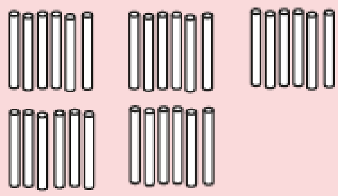
(Extrait du guide de l'enseignant, p. 284)

Les procédures sont différentes de celles utilisables pour les problèmes de groupements réguliers, bien qu'elles fassent éventuellement appel aux mêmes opérations.

EXPLICITATION, VERBALISATION

Reformuler la procédure la plus simple en la formalisant et en l'illustrant à l'aide des buchettes :

On peut utiliser la table de multiplication de 5 :
5 fois 6 c'est 30.
On peut donc donner 6 buchettes à chacun.



Vérifier la réponse par des calculs :

6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 30

ou **5 x 6 = 30**

(Extrait du guide de l'enseignant, p. 284)

Le résultat de la table de multiplication qui permet de de trouver la réponse ou d'en rendre compte est le même que pour le problème précédent. C'est ce fait qui pourra être utilisé au CE2, puis au CM1 pour mettre en évidence que l'opération division permet de résoudre les 2 catégories de problèmes.

Annexe : typologie des problèmes du champ multiplicatif envisagés au CE1

Pour chaque type de problème, un exemple est fourni, emprunté au Livret "Problèmes et énigmes" inséré dans le fichier Cap Maths CE1 (3e colonne). La 4e colonne répertorie par leurs numéros tous les problèmes de ce livret.

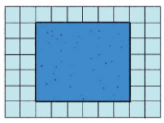
Réunion de plusieurs parts égales (grandeurs ou quantités identiques)

a : valeur d'une part   b : nombre de parts   c : valeur totale

1 à a b à c	Recherche de la valeur totale	Alex a ramassé des champignons. Il les a mis dans 4 sacs. Dans chaque sac, il y a 5 champignons. **Combien de champignons Alex a-t-il ramassés ?** (n° 13)	8 11 13 14 16b 17a 21 23 27 32 33a-b 47 48 50
1 à a b à c	Recherche de la valeur d'une part	Arthur range ses 30 photos de footballeurs dans un album. Il colle le même nombre de photos sur chaque page. Il a rempli 5 pages. **Combien de photos Arthur a-t-il collées sur chaque page ?** (n° 54)	44 49a 54
1 à a b à c	Recherche du nombre de parts	Pour son anniversaire, Lisa veut acheter 36 chocolats. Les chocolats sont vendus par sachets de 2. **Combien de sachets doit-elle acheter ?** (n° 38)	16a 37 38 52 53

Configuration rectangulaire (lignes et colonnes régulières)

l : nombre de lignes   c : nombre de colonnes   T : nombre total d'objets

l c T	Recherche du nombre total d'objets	Les élèves de l’école ont tracé un quadrillage sous le préau. Pour préparer un jeu, Alex a posé une grande serviette sur le quadrillage.  **Combien de carrés y a-t-il sur tout le quadrillage tracé par les élèves ?** (n° 28)	22 28a-b
l c T ou l c T	Recherche du nombre de lignes ou du nombre de colonnes	*Non proposé au CE1.*	