Vers l'épreuve écrite (p. 52)

Exercice guidé 135 Corrigé

1. a. Sur les 25 pièces, 3 sont défectueuses et 22 non défectueuses.
La probabilité que la pièce choisie ne soit pas défectueuse est donc $\frac{22}{25} = 0{,}88$.
b. On peut imaginer que la personne malchanceuse choisit les 3 pièces défectueuses en premier.
Les 7 pièces suivantes seront donc sans défauts. En achetant 10 pièces, elle est donc certaine d'en avoir 7 non défectueuses.

2. a. Dans cette question, on distingue les 25 pièces.
Le nombre de façons d'en choisir 2 parmi les 25 est $\binom{25}{2} = 300$.
Parmi ces 300 façons, le nombre de façons d'en choisir 2 sans défauts est $\binom{22}{2} = 231$.
La probabilité de choisir 2 pièces sans défauts est donc $\frac{231}{300} = 0{,}77$.
b. Parmi les 2 pièces choisies, le nombre de pièces défectueuses peut être 0, 1 ou 2.
X peut donc prendre les valeurs 0, 1 et 2.
• D'après la question précédente, la probabilité d'avoir 0 pièce avec défaut est 0,77.
On a donc $P(X = 0) = 0{,}77$.
• Le nombre de façons de choisir 2 pièces avec défaut est $\binom{3}{2} = 3$.
La probabilité de choisir 2 pièces avec défaut est donc $\frac{3}{300} = 0{,}01$.
On a donc $P(X = 2) = 0{,}01$.
• Déterminons le nombre de façons d'obtenir exactement 1 pièce défectueuse parmi les 2 choisies.
L'une étant défectueuse et l'autre non, le nombre de façons cherché est $3 \times 22 = 66$.
La probabilité d'obtenir exactement 1 pièce défectueuse est $P(X = 1) = \frac{66}{300} = 0{,}22$.
Remarque : on aurait pu calculer directement $P(X = 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 2) = 1 - 0{,}77 - 0{,}01 = 0{,}22$.
• Synthétisons les résultats précédents dans un tableau :

k	0	1	2
$P(X = k)$	0,77	0,22	0,01

L'espérance mathématique de X est :

$$E(X) = 0{,}77 \times 0 + 0{,}22 \times 1 + 0{,}01 \times 2 = 0{,}24.$$

Exercice guidé 136 Corrigé

1. Un enchaînement constitue une permutation des 8 morceaux de musique.
Le nombre d'enchaînements est donc $8! = 40\,320$.

2. La probabilité d'entendre un enchaînement particulier est $\frac{1}{40\,320}$.

3. a. Si le morceau n° 8 est en première position, il reste alors à distribuer les 7 autres morceaux de la position n° 2 à la position n° 8. Le nombre de façons de le faire est $7! = 5\,040$.
Parmi les 40 320 enchaînements, 5 040 commencent par le n° 8. La probabilité d'avoir le morceau n° 8 en première position est donc $P(A) = \frac{5\,040}{40\,320} = \frac{1}{8}$.
Ce résultat est logique : les 8 morceaux ayant la même probabilité de débuter, on a bien 1 chance sur 8 d'avoir le morceau n° 8 en première position.
b. De la même façon, la probabilité d'avoir le morceau n° 7 en deuxième position est $P(B) = \frac{1}{8}$.
c. Testons l'égalité $P(A) \times P(B) = P(A \cap B)$.
• $P(A) \times P(B) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{64}$.
• $A \cap B$ est l'événement : « le morceau n° 8 est en première position et le morceau n° 7 est en deuxième position ». Le nombre d'enchaînements avec le morceau n° 8 en première position et le morceau n° 7 en deuxième position est égal au nombre de façons de distribuer les 6 autres morceaux dans les 6 positions restantes, c'est-à-dire $6! = 720$.
On a donc $P(A \cap B) = \frac{720}{40\,320} = \frac{1}{56}$.
• Finalement, $P(A) \times P(B) \neq P(A \cap B)$ donc les événements A et B ne sont pas indépendants.
Remarque : deux événements sont indépendants lorsque la réalisation de l'un ne modifie pas la probabilité de réalisation de l'autre ; or, imposer de commencer l'enchaînement par le n° 8 augmente la probabilité d'avoir le morceau n° 7 en deuxième position.

4. a. Le nombre de morceaux du groupe Zebra parmi les 3 morceaux écoutés peut être égal à 0, 1, 2 ou 3.
X prend donc les valeurs 0, 1, 2 et 3.
b. Le nombre de façons de choisir 3 morceaux parmi les 8 morceaux est $\binom{8}{3} = 56$.
Parmi ces 56 enchaînements de 3 morceaux, déterminons le nombre d'enchaînements contenant exactement 2 morceaux du groupe Zebra.
Le nombre de façons de choisir 2 morceaux de Zebra est $\binom{3}{2} = 3$. Pour chacune de ces 3 façons, il existe 5 façons différentes de compléter avec un troisième morceau différent de Zebra. Par principe multiplicatif, le nombre d'enchaînements de 3 morceaux contenant exactement 2 morceaux de Zebra est $3 \times 5 = 15$.
Finalement, la probabilité d'avoir exactement 2 morceaux de Zebra est $P(X = 2) = \frac{15}{56}$.
c. • Le nombre de façons de choisir 3 morceaux autres que ceux de Zebra est $\binom{5}{3} = 10$. Donc $P(X = 0) = \frac{10}{56}$.
• Le nombre de façons de choisir 3 morceaux avec exactement 1 morceau du groupe Zebra est $\binom{5}{2} \times 3 = 30$.
Donc $P(X = 1) = \frac{30}{56}$.
• D'après la question **b**, $P(X = 2) = \frac{15}{56}$.
• Le nombre de façons de choisir 3 morceaux du groupe Zebra est $\binom{3}{3} = 1$. Donc $P(X = 3) = \frac{1}{56}$.
La loi de probabilité de X, sous forme de tableau, est donc :

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{10}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$