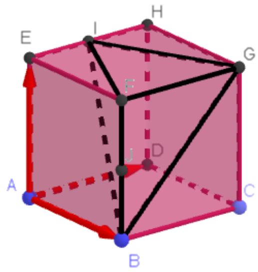
Vers l'épreuve écrite (p. 116)

Exercice guidé 133 Corrigé

1.



2. a. Le cube est d'arête 1, donc AB = AD = AE = 1, et les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont orthogonaux deux à deux. Donc le repère (A ; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$) est orthonormé.
b. I(0 ; 0,5 ; 1) et J(1 ; 0 ; 0,5)

3. a. On a : $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GI}\begin{pmatrix}-1\\-0,5\\0\end{pmatrix}$.
$\vec{n}\cdot\overrightarrow{BG} = 0 \times 1 + 1 \times (-2) + 1 \times 2 = 0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{GI} = -1 \times 1 + (-0,5) \times (-2) + 0 \times 2 = 0$.
$\vec{n}$ est orthogonal a deux vecteurs non colinéaires du plan (BGI) donc c'est un vecteur normal à (BGI).

b. K est le milieu de [HJ], il a donc pour coordonnées (0,5 ; 0,5 ; 0,75) ; et $\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix}-0,5\\0,5\\0,75\end{pmatrix}$.
$\overrightarrow{BK}\cdot\vec{n} = -0,5 - 1 + 1,5 = 0$.
$\overrightarrow{BK}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux, et B est un point de (BGI), donc K appartient à (BGI).

4. a. $V_{\text{FBIG}} = \frac{1}{3}A_{\text{FGI}} \times \text{FB}$ avec $A_{\text{FGI}} = \frac{1}{2}\text{FH} \times h = \frac{1}{2}$.
$V_{\text{FBIG}} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6}$.
b. Notons d la distance du point F au plan (BGI).
On prend M = G dans la formule donnée en rappel. On a $\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

$$d = \frac{|\overrightarrow{FG}.\vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|-2|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{2}{3}.$$

c. $V_{\text{FBIG}} = \frac{1}{3}A_{\text{BGI}} \times d$ donc $\frac{1}{6} = \frac{1}{3}A_{\text{BGI}} \times \frac{2}{3}$, donc $A_{\text{BGI}} = \frac{3}{4}$.

Exercice guidé 134 Corrigé

1. $\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$.

On remarque que $\overrightarrow{CD} = 4\vec{v}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, donc $\vec{v}$ est un vecteur directeur de (CD).

2. a. $\overrightarrow{CM}$ est aussi un vecteur directeur de (CD), donc $\overrightarrow{CM}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, donc il existe un nombre réel t tel que $\overrightarrow{CM} = t\vec{v}$.

b. Notons $(x ; y ; z)$ les coordonnées de M.

$$\overrightarrow{CM} = t\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y-3\\z-2\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 3 \\ z = 2-t \end{cases}.$$

On a bien $M(t ; 3 ; 2-t)$.

c. $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}t-4\\3-(-1)\\2-t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t-4\\4\\2-t\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}\text{BM} &= \sqrt{(t-4)^2+4^2+(2-t)^2}\\ &= \sqrt{t^2-8t+16+16+4-4t+t^2}\\ &= \sqrt{2t^2-12t+36}\\ &= \sqrt{2}\times\sqrt{t^2-6t+18}.\end{aligned}$$

d. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x - 6$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	9	$\nearrow$	$+\infty$

e. On remarque que $BM^2 = 2f(t)$, donc BM est minimale $\Leftrightarrow$ BM^2 est minimale $\Leftrightarrow$ $f(t)$ minimale $\Leftrightarrow$ $t = 3$. On a alors $M(3 ; 3 ; -1)$.

3. a. On sait que $\overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$ et on a $\overrightarrow{CH}\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$. On remarque que $4\overrightarrow{CH} = 3\overrightarrow{CD}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, donc le point H appartient à la droite (CD).

b. On a $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\4\\-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CD} = -4 + 4 = 0$, donc les droites (BH) et (CD) sont perpendiculaires.

c. H appartient à la droite (CD), et (BH) et (CD) sont perpendiculaires, donc (BH) est la hauteur issue de B dans le triangle BCD. Par suite, $A_{\text{BCD}} = \frac{\text{BH}\times\text{CD}}{2} = \frac{\sqrt{1+16+1}\times\sqrt{16+0+16}}{2} = \frac{\sqrt{18\times32}}{2} = 12\ \text{cm}^2$.

4. a. $\vec{n}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\4\\-1\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan (BCD), ils en sont donc des vecteurs directeurs.

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{CD} = 0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{BH} = 0$ donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (BCD).

b. Notons H le projeté orthogonal de A sur le plan (BCD). AH $= \frac{|\overrightarrow{AM}.\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$ pour tout point M du plan (BCD).

En particulier, pour le point B : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-2\\-4\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ d'où AH $= \frac{|\overrightarrow{AB}.\vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|4-2-8|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{6}{3} = 2$.

$V_{\text{ABCD}} = \frac{1}{3}A_{\text{BCD}} \times \text{AH} = \frac{1}{3}\times 12\times 2 = 8\ \text{cm}^3$.