

Démontrer une équivalence de propositions

Avec démonstrations des exemples

Pour démontrer l'équivalence « $\mathcal{P}$ est ÉQUIVALENTE à $\mathcal{Q}$ », on peut :

- soit travailler directement par équivalences ;
- soit démontrer la double implication « $\mathcal{P}$ IMPLIQUE $\mathcal{Q}$ » et « $\mathcal{Q}$ IMPLIQUE $\mathcal{P}$ ».

Exemples

• Pour tout nombre réel x , « $x^3 - 4x = 0$ est équivalente à $(x = 0 \text{ ou } x = 2 \text{ ou } x = -2)$ » se démontre aisément par équivalences successives.

En effet : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x^3 - 4x = 0 &\Leftrightarrow x(x^2 - 4) = 0 \\ &\Leftrightarrow x(x - 2)(x + 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2 \text{ ou } x = -2 \end{aligned}$$

• Pour tout nombre réel x , « $\sqrt{x - 2} = 4 - x$ est équivalente à $x = 3$ » se démontre plus facilement par une double implication que par équivalences successives.

En effet, en procédant par double implication, on a :

$(\Rightarrow) \forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \sqrt{x - 2} = 4 - x &\Rightarrow x - 2 = (4 - x)^2 \text{ et } 4 - x \geq 0 \\ &\Rightarrow x - 2 = 16 - 8x + x^2 \text{ et } x \leq 4 \\ &\Rightarrow x^2 - 9x + 18 = 0 \text{ et } x \leq 4 \end{aligned}$$

L'équation du second degré admet deux solutions réelles : $x = 3$ ou $x = 6$; comme $x \leq 4$, on conclut : $x = 3$.

$(\Leftarrow) \forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x = 3 &\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x - 2} = \sqrt{1} = 1 \\ 4 - x = 1 \end{cases} \\ &\Rightarrow \sqrt{x - 2} = 4 - x \end{aligned}$$

On a démontré chacune des deux implications, donc l'équivalence est démontrée.