Vers l'épreuve écrite (p. 280)

Exercice guidé 104 Corrigé

Partie A

1. f est une fonction polynôme du second degré et le coefficient de x^2 est $-0{,}4 < 0$, donc f est strictement croissante sur $]-\infty\ ;\ 1{,}25]$ et strictement décroissante sur $[1{,}25\ ;\ +\infty[$. f est donc strictement croissante sur $[0\ ;\ 1]$.

2. Montrons par récurrence que $0 \leq P_{n+1} \leq P_n \leq 1$ pour tout nombre entier naturel n.
Initialisation : si $n = 0$, $P_0 = 0{,}6$ et $P_1 = 0{,}456$; on a bien $0 \leq P_1 \leq P_0 \leq 1$.
La propriété est vraie au rang 0.
Hérédité : on suppose que la propriété est vraie à un rang n fixé ; on a donc $0 \leq P_{n+1} \leq P_n \leq 1$.
Montrons que la propriété est encore vraie au rang suivant, c'est-à-dire que $0 \leq P_{n+2} \leq P_{n+1} \leq 1$.
La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ et $0 \leq P_{n+1} \leq P_n \leq 1$.
Donc $f(0) \leq f(P_{n+1}) \leq f(P_n) \leq f(1)$. D'où $0 \leq P_{n+2} \leq P_{n+1} \leq 0{,}6 \leq 1$.
La propriété est vraie au rang $n + 1$.
Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire ; par conséquent, pour tout entier naturel n, on a $0 \leq P_{n+1} \leq P_n \leq 1$.

3. D'après la question **2**, on déduit immédiatement que (P_n) est décroissante et minorée par 0 ; elle est donc convergente vers un nombre réel m. f étant continue sur $\mathbb{R}$, m est solution de l'équation $f(m) = m \Leftrightarrow m = 0$. Ce n'est pas une bonne nouvelle pour les koalas.

Partie B

1. La fonction P est dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ en tant que composée et quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0\ ;\ +\infty[$. Pour tout nombre réel t de $[0\ ;\ +\infty[$, on a :

$$P'(t) = \frac{1800\mathrm{e}^{-0,5t}}{(0{,}4+3{,}6\mathrm{e}^{-0,5t})^2}.$$

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$. Donc pour tout nombre réel t positif on a $P'(t) > 0$.
Après calcul de limite, on obtient le tableau de variations de P :

t	0	$+\infty$
$P'(t)$	$+$	
P	$250 \nearrow$	$2\,500$

2. La fonction P est continue (comme composée et quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0\ ;\ +\infty[$) et strictement croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
De plus, $P(0) = 250 < 2\,000$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} P(t) = 2500 > 2\,000$.
D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $P(t) = 2\,000$ possède une unique solution t_0 sur $[0\ ;\ +\infty[$.

3. D'après la calculatrice, on a $t_0 \approx 7{,}2$.
Selon ce modèle, la population des koalas aura dépassé pour la première fois les 2 000 koalas en 2028.