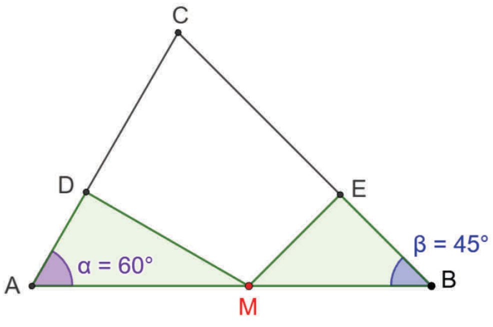
Problème guidé
Corrigé

105

1. Voir le fichier à télécharger : hatier-clic.fr/25ma2277



On conjecture une aire minimale de 11,6 pour une longueur AM environ égale à 5,4.

2. a. Le triangle ADM est rectangle en D (définition du projeté orthogonal).
En posant AM = 3, on a :

• $\cos(\widehat{DAM}) = \frac{AD}{AM}$ donc $\cos(60°) = \frac{AD}{3}$. Donc $AD = 3 \times \cos(60°) = 1{,}5$.

• $\sin(\widehat{DAM}) = \frac{DM}{AM}$ donc $\sin(60°) = \frac{DM}{3}$. Donc $DM = 3 \times \sin(60°) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2{,}598$.

On aurait pu aussi calculer la longueur DM à l'aide du théorème de Pythagore dans le triangle ADM rectangle en D : $AM^2 = AD^2 + DM^2$ soit $DM^2 = 3^2 - 1{,}5^2 = 6{,}75$.
Donc $DM = \sqrt{6{,}75} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

b. MEB est un triangle rectangle isocèle en E car les angles à la base sont égaux :

$$\widehat{EMB} = 180° - \widehat{MEB} - \widehat{MBE} = 180° - 90° - 45° = 45° = \widehat{MBE}$$

On sait donc que ME = EB.
D'après le théorème de Pythagore, $MB^2 = ME^2 + EB^2$, soit $7^2 = 2ME^2$ donc $ME^2 = \frac{49}{2}$

et $ME = \frac{7}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$.

L'aire du triangle ADM est : $\mathcal{A}_{ADM} = \frac{AD \times DM}{2} = \frac{1{,}5 \times \frac{3\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\frac{3}{2} \times \frac{3\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\frac{9}{4} \times \sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{8}$

L'aire du triangle BME est : $\mathcal{A}_{BME} = \frac{ME \times EB}{2} = \frac{ME^2}{2} = \frac{\frac{49}{2}}{2} = \frac{49}{4}$

c. L'aire du motif est égale à la somme des aires des triangles ADM et BME :

$$\mathcal{A}_{motif} = \mathcal{A}_{ADM} + \mathcal{A}_{BME} = \frac{9\sqrt{3}}{8} + \frac{49}{4} \approx 14{,}20$$

Si AM = 3, l'aire du motif est donc supérieure à l'aire minimale ($\mathcal{A}$ = 11,6) observée à la question **1** à l'aide du logiciel de géométrie dynamique. On en conclut que cette position du point M n'est pas celle correspondant à l'aire minimale du motif.

Maths 2de © Éditions Hatier, 2025.

3. a. En posant AM = x, on a :

- MB = $10 - x$
- AD = $x \times \cos(60°) = \frac{x}{2}$
- DM² = $x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{3x^2}{4}$ donc DM = $\frac{x\sqrt{3}}{2}$.

Donc l'aire du triangle ADM est :

$$\mathcal{A}_{\text{ADM}} = \frac{\text{AD} \times \text{DM}}{2} = \frac{\frac{x}{2} \times \frac{x\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{x^2\sqrt{3}}{8}$$

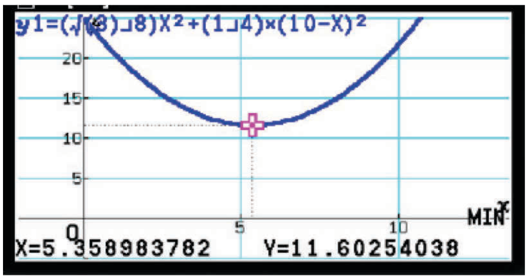
De plus, d'après le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle MEB,
MB² = ME² + EB², soit $(10 - x)^2$ = 2ME² (car MEB est un triangle isocèle, voir question **2b**).
Donc ME² = $\frac{(10 - x)^2}{2}$.
Donc l'aire du triangle BME est :

$$\mathcal{A}_{\text{BME}} = \frac{\text{ME} \times \text{EB}}{2} = \frac{\text{ME}^2}{2} = \frac{\frac{(10 - x)2}{2}}{2} = \frac{(10-x)^2}{4}$$

Donc la somme des aires des triangles ADM et MEB (c'est-à-dire l'aire du motif) est bien :

$$S(x) = \frac{\sqrt{3}}{8}x^2 + \frac{1}{4}(10 - x)^2$$

b. On trace la courbe de la fonction S avec la calculatrice.



Le minimum semble être 11,6 atteint environ en 5,36.

Maths 2de © Éditions Hatier, 2025.