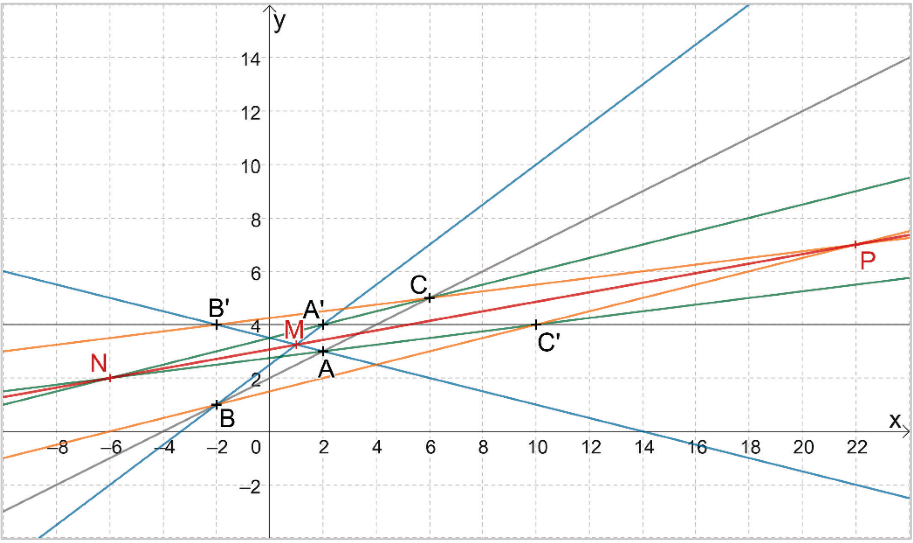
Problème guidé
Corrigé

164

1. a.



Voir fichier à l'adresse hatier-clic.fr/25ma2309.

b. Avec A(2 ; 3), B(–2 ; 1) et C(6 ; 5), on a $\overrightarrow{AB}\binom{-4}{-2}$ et $\overrightarrow{AC}\binom{4}{2}$,

d'où $\det\left(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}\right) = -4 \times 2 - 4 \times (-2) = 0$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont donc colinéaires.

Par conséquent, les points A, B et C sont alignés.

c. Les points A', B' et C' ont tous la même ordonnée, donc ils sont alignés.

2. a. Avec A(2 ; 3), B'(–2 ; 4) et M(x ; y), on a $\overrightarrow{AB'}\binom{-4}{1}$ et $\overrightarrow{AM}\binom{x-2}{y-3}$.

M ∈ (AB') $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB'}$ sont colinéaires.

$\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM} ;\ \overrightarrow{AB'}\right) = 0$

$\Leftrightarrow (x-2) \times 1 - (y-3) \times (-4) = 0$

$\Leftrightarrow x - 2 + 4y - 12 = 0$

$\Leftrightarrow x + 4y - 14 = 0$

Une équation cartésienne de (AB') est $x + 4y - 14 = 0$.

Avec A'(2 ; 4), B(–2 ; 1) et M(x ; y), on a $\overrightarrow{A'B}\binom{-4}{-3}$ et $\overrightarrow{BM}\binom{x+2}{y-1}$.

M ∈ (A'B) $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{A'B}$ sont colinéaires.

$\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{BM} ;\ \overrightarrow{A'B}\right) = 0$

$\Leftrightarrow (x+2) \times (-3) - (y-1) \times (-4) = 0$

$\Leftrightarrow -3x - 6 + 4y - 4 = 0$

$\Leftrightarrow 3x - 4y + 10 = 0$

Une équation cartésienne de (A'B) est $3x - 4y + 10 = 0$.

b. Un vecteur directeur de (AB’) est $\vec{u}\binom{-4}{1}$.

Un vecteur directeur de (A’B) est $\vec{v}\binom{4}{3}$.

$\det(\vec{u}\,;\vec{v}) = -4 \times 3 - 1 \times 4 = 8 \neq 0$.

Les droites (AB’) et (A’B) sont donc sécantes.

3. a. Pour le point M, on résout par substitution le système d’équations formé par les équations cartésiennes des droites (AB’) et (A’B).

Pour le point M : $\begin{cases} x + 4y - 14 = 0 \\ 3x - 4y + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4y + 14 \\ 3x - 4y + 10 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -4y + 14 \\ 3(-4y + 14) - 4y + 10 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -4y + 14 \\ -12y + 42 - 4y + 10 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -4y + 14 \\ -16y + 52 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -4y + 14 \\ y = \frac{13}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \times \frac{13}{4} + 14 \\ y = \frac{13}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{13}{4} \end{cases}$$

D’où $\mathrm{M}\left(1\,;\frac{13}{4}\right)$.

De même, pour le point N avec les équations cartésiennes des droites (AC’) et (A’C) :

$$\begin{cases} -x + 8y - 22 = 0 \\ -x + 4y - 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = 2 \end{cases}$$

D’où N(–6 ; 2).

Enfin, pour le point P avec les équations cartésiennes des droites (BC’) et (B’C) :

$$\begin{cases} -x + 8y - 34 = 0 \\ -x + 4y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 22 \\ y = 7 \end{cases}$$

D’où P(22 ; 7).

b. Avec les coordonnées des points déterminées ci-dessus, on a $\overrightarrow{\mathrm{MN}}\begin{pmatrix} -7 \\ -\frac{5}{4} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{NP}}\binom{28}{5}$,

d’où $\det\left(\overrightarrow{\mathrm{MN}}\,;\overrightarrow{\mathrm{NP}}\right) = 5 \times (-7) - 28 \times \left(-\frac{5}{4}\right) = -35 + 35 = 0$.

Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{NP}}$ sont donc colinéaires.
Par conséquent, les points M, N et P sont alignés.