Chapitre 12 p. 368

53 Résolution de problème Chute d'un smartphone waterproof

QUESTION PRÉLIMINAIRE

On définit le système d'axes ci-contre.
Le triangle est rectangle, d'où :

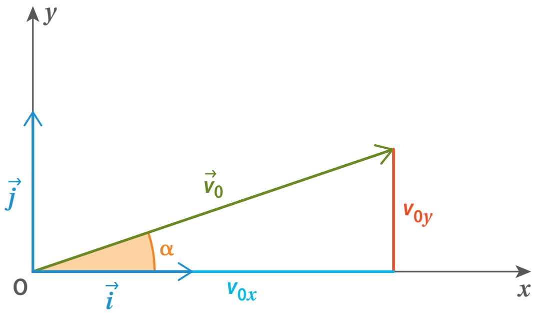
$$\cos(\alpha) = \frac{v_{0x}}{v_0}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{v_{0y}}{v_0}$$

Ainsi les coordonnées du vecteur vitesse initiale sont :

$$v_{0x} = v_0\cos(\alpha)$$

$$v_{0y} = v_0\sin(\alpha)$$



PROBLÈME

● Pour déterminer l'endroit de l'impact du smartphone, on commence par déterminer les équations horaires du mouvement.
Le système étudié est le smartphone.
D'après le bilan des forces, le smartphone ne subit que son poids $\vec{P} = m\vec{g}$.
Le référentiel terrestre est considéré comme galiléen, on peut utiliser la deuxième loi de Newton.

D'après la deuxième loi de Newton : $m\vec{a}(t) = \sum \vec{F}$

Ici $m\vec{a}(t) = m\vec{g}$

En simplifiant par la masse : $\vec{a}(t) = \vec{g}$

Le vecteur accélération est égal au vecteur intensité gravitationnelle. Il est donc constant. On en déduit qu'il s'agit d'un mouvement uniformément accéléré.

Sachant que $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}(t)$ et que $\vec{a}(t) = \vec{g}$, on peut écrire :

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt}(t) = 0 \\ \frac{dv_y}{dt}(t) = -g \end{cases}$$

On obtient les coordonnées de la vitesse en calculant les primitives :

$$\begin{cases} v_x(t) = C_1 \\ v_y(t) = -gt + C_2 \end{cases}$$

Avec C_1 et C_2 des constantes.
D'après la question préliminaire, les conditions initiales indiquent qu'à $t = 0$:

$$\vec{v}_0 \begin{pmatrix} v_0\cos(\alpha) \\ v_0\sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

D'où

$$\begin{cases} v_x(t = 0) = C_1 = v_0\cos(\alpha) \\ v_y(t = 0) = C_2 = v_0\sin(\alpha) \end{cases}$$

On en déduit les coordonnées de la vitesse à tout instant :

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0\cos(\alpha) \\ v_y(t) = -gt + v_0\sin(\alpha) \end{cases}$$

Sachant que $\vec{v}(t)=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t)$, on peut écrire :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = v_0\cos(\alpha) \\ \frac{dy}{dt}(t) = -gt + v_0\sin(\alpha) \end{cases}$$

On obtient pour les coordonnées de la position en calculant les primitives :

$$\begin{cases} x(t) = v_0\cos(\alpha)t + C_3 \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin(\alpha)t + C_4 \end{cases}$$

Avec C_3 et C_4 des constantes.
Or les conditions initiales indiquent qu'à $t = 0$:

$$\overrightarrow{OM}_0 \binom{0}{0}$$

D'où

$$\begin{cases} x(t = 0) = C_3 = 0 \\ y(t = 0) = C_4 = 0 \end{cases}$$

On en déduit les coordonnées de la position à tout instant :

$$\begin{cases} x(t) = v_0\cos(\alpha)t \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin(\alpha)t \end{cases}$$

● Il faut maintenant déterminer l'instant (qui sera noter t_1) de l'impact du smartphone avec le sol ou le niveau de l'eau. Le smartphone touchera l'eau (ou le quai) lorsque :

$$y(t_1) = -h$$

Ainsi

$$-\frac{1}{2}g{t_1}^2 + v_0\sin(\alpha)t_1 = -h$$

Soit

$$-\frac{1}{2}g{t_1}^2 + v_0\sin(\alpha)t_1 + h = 0$$

C'est une équation polynômiale du deuxième degré dont le discriminant est :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = \left(v_0\sin(\alpha)\right)^2 - 4 \times \left(-\frac{1}{2}g\right) \times \mathrm{h} = \left(v_0\sin(\alpha)\right)^2 + 2gh$$

Ce discriminant est positif, il existe donc deux solutions. On ne s'intéresse qu'à la solution positive (la solution négative n'ayant pas de sens physique) :

$$t_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$t_1 = \frac{-v_0\sin(\alpha) - \sqrt{\left(v_0\sin(\alpha)\right)^2 + 2gh}}{2 \times \left(-\frac{1}{2}g\right)} = \frac{v_0\sin(\alpha) + \sqrt{\left(v_0\sin(\alpha)\right)^2 + 2gh}}{g}$$

$$t_1 = \frac{6{,}08 \times \sin(18{,}7) + \sqrt{\left(6{,}08 \times \sin(18{,}7)\right)^2 + 2 \times 9{,}81 \times 80}}{9{,}81} = 4{,}2 \text{ s}$$

● L'abscisse du point d'impact au temps $t_1 = 4{,}2$ s est :

$$x(t_1) = v_0\cos(\alpha)t_1$$

Soit

$$x(t_1) = 6{,}08 \times \cos(18{,}7) \times 4{,}2 = 24 \text{ m}$$

Au moment du lâcher, le smartphone se trouvait à 15 m du quai. Au cours de la chute, le smartphone a parcouru une distance horizontale égale à 24 m. Au moment de l'impact le smartphone ne se trouve donc plus dans l'eau mais sur le quai. Il est fort à parier que cet impact ait été fatal au smartphone.